

## La matriz de covarianzas de residuales en la asignación y valuación de activos

**Benjamín García Martínez\***  
**Arturo Lorenzo Valdés\*\***

18 de Febrero 2008, Aceptado 6 de junio 2008

### Resumen

La metodología de “portafolios Ortogonales” aplicada por Roll (1980) para que, dado un índice de mercado no eficiente en el sentido media-varianza, se pueda encontrar el portafolio ortogonal zero-beta que considere la información de  $\alpha_j \neq 0$  (sub/sobrevaluación), es utilizada por MacKinley y Pastor (2000) para obtener un factor de riesgo no observado y seleccionar un portafolio que considere que la fuente de la ineficiencia es resultado de la omisión de factores de riesgo. La información contenida en la matriz de covarianzas residual ( $\Sigma$ ) resultante de la relación lineal de los rendimientos y un índice no eficiente es relacionada con el elemento de sub/sobrevaluación ( $\alpha$ ) para encontrar una estructura exacta de determinación de los rendimientos esperados de los activos en base a un modelo lineal de factores de riesgo, dado un índice no eficiente y un conjunto de  $N$ -activos. Este trabajo aplica esta metodología a excesos de rendimiento de 25 acciones del mercado mexicano y utiliza como factor observado a los excesos de rendimiento del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) durante el periodo enero de 2004 a julio de 2007.

### Abstract

“Orthogonal portfolios” methodology applied by Roll (1980), in order to get an orthogonal zero-beta portfolio when we have a nonefficient market index in Mean-Variance approach, is used by MacKinley and Pastor (2000) to obtain a non observed risk factor that considers the information  $\alpha_j \neq 0$  (misspricing) and to select a portfolio that considers that the source of inefficiency is resulted from the omission of risk factors. The information contained in the residual covariance ( $\Sigma$ ) resulting of the linear relation between the returns and a nonefficient index is related to the sub/supervaluación element ( $\alpha$ ) to find an exact structure of the determination of the expected returns of the assets on the basis of a linear model of risk factors, given a nonefficient

---

\* Profesor del Departamento de Contabilidad y Finanzas. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México. Calle del Puente No. 222, Ejidos de Huipulco, Tlalpan, C. P. 14380 México, D. F. Teléfono: 5483-2235 Correo electrónico: benjamin.garcia@itesm.mx

\*\* Profesor del Departamento de Contabilidad y Finanzas. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México. Calle del Puente No. 222, Ejidos de Huipulco, Tlalpan, C. P. 14380 México, D. F. Teléfono: 5483-2259 Correo electrónico: arvaldes@itesm.mx

Index and a  $N$ -active set. This work applies this methodology to 25 stock return excesses from the Mexican market and uses like observed factor the return excesses of the Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) during the period January , 2004 to July, 2007.

*Clasificación JEL:* G11, G12, C52

*Palabras clave:* Media-varianza, residuales, CAPM, elección de portafolio.

## 1. Introducción

En los modelos de valuación de activos basados en factores de riesgo, la matriz de covarianzas de los errores, juega un papel fundamental, pues se sugiere contiene información tanto de factores omitidos, de una mala especificación del portafolios de mercado, como de la propia correlación contemporánea entre los rendimientos de los activos.

Las implicaciones de considerar que la matriz de covarianzas de los residuales contiene información relevante son: 1) el reconocimiento de que es importante incorporar un concepto multidimensional del riesgo para estimar los rendimientos de los activos y, 2) que dada la dificultad de identificar estos factores de riesgo adicionales, se sugiere que estos pueden obtenerse a través de la matriz de covarianzas residual. De hecho se reconoce en la mayor parte de los autores que las covarianzas pueden ser mejor estimadas que los rendimientos, por lo que se puede mejorar la estimación de los rendimientos utilizando la información contenida en estas covarianzas, especialmente la de los residuales. Esto claramente asume el proceso de estimación lineal de los rendimientos respecto a un proxy de mercado<sup>1</sup>.

La idea de que la matriz de covarianzas de los rendimientos de los activos y/o su inversa, pueda descomponerse en su parte sistemática y no sistemática, tiene como objetivo principal recuperar la información contenida en el componente no sistemático del riesgo de los portafolios. Esto permitiría no solo un mejor proceso de valuación de los rendimientos esperados, sino mejorar el proceso de selección de portafolios. Cobra importancia en los modelos basados en análisis de los rendimientos de factores de riesgo, utilizar como una restricción adicional la matriz de covarianzas residual y su relación con los componentes adicionales no explicados por los factores, que constituyen un elemento de sub/sobrevaluación de los activos (mispricing).

Algunos autores buscan identificar factores desde la matriz de covarianzas de los residuos usando análisis de factores o de componentes principales (Roll & Ross, 1980). Fama y French (1992), asignan por grupos los activos a partir de ciertas características para encontrar diferencias entre los rendimientos de los grupos y, por tanto, tener un factor adicional. MacKinlay y Pastor (2000), establecen una liga explícita entre los rendimientos promedio y la matriz de covarianzas de los residuos para encontrar factores no observados a partir de la información de una muestra de activos. Guy Stevens (1998), incorpora, de manera explícita, los resultados de las regresiones en la inversa de la matriz de covarianzas. Es de resaltar la importancia que todos estos esfuerzos han

---

<sup>1</sup> La búsqueda de explicaciones de las aparentes violaciones de los modelos de equilibrio se puede dividir en aquellas basadas en encontrar factores adicionales de riesgo y/o detectar problemas con la identificación del portafolio de mercado de aquellas que parten de que los supuestos de racionalidad y existencia de mercados sin fricciones no se cumplen.

realizado para incorporar las matrices de covarianzas de los residuos a partir del modelo de factores.

Este trabajo se basa en la aplicación que hacen MacKinlay y Pastor de la metodología de portafolios ortogonales para encontrar un factor de riesgo no observado que permita mejorar la explicación y pronóstico de los rendimientos esperados y la asignación de activos en un portafolio óptimo (tangencia).

## 2. Modelos de Factores y portafolios ortogonales

La metodología de “portafolios Ortogonales” aplicada por Roll (1980) establece que, dado un índice de mercado no eficiente en el sentido media-varianza, se puede encontrar el portafolio ortogonal zero-beta que considere la información de  $\alpha_j \neq 0$  (sub/sobrevaluación). MacKinley y Pastor (2000) utilizan la metodología de Roll para obtener un factor de riesgo no observado y seleccionar un portafolio que considere que la fuente de la ineficiencia es resultado de la omisión de factores de riesgo. La información contenida en la matriz de covarianzas residual ( $\Sigma$ ) resultante de la relación lineal de los rendimientos y un índice no eficiente es relacionada con el elemento de sub/sobrevaluación ( $\alpha$ ) para encontrar una estructura exacta de determinación de los rendimientos esperados de los activos en base a un modelo lineal de factores de riesgo, dado un índice no eficiente y un conjunto de  $N$ -activos.

Si partimos de portafolios eficientes, el zero-beta de mínima varianza es único para el índice dado. Cuando el índice no es eficiente, se tiene un vector ( $\alpha$ ) definido por

$$\alpha_j = E[R_j] - E[R_Z] - \beta_j E[R_m - R_Z] \neq 0 \quad (1)$$

donde  $R_j$  es el rendimiento del activo  $j$  y  $R_z$  es el rendimiento del portafolio zero-beta. Este vector ( $\alpha$ ) puede interpretarse como la medida de ineficiencia o resultado de la omisión de factores de riesgo. De esta manera, si el índice es eficiente o incorporamos factores de riesgo no observados, no solo  $\alpha_j$  se desvanece para todo  $j$ , sino que el precio del riesgo de cada activo será equivalente al precio del riesgo de cada factor por la cantidad de riesgo medido por sus sensibilidades ( $\beta_j$ ) respectivas.

La relación riesgo-rendimiento propuesta en el modelo CAPM, muestra que en análisis de corte transversal los excesos de rendimiento esperados de los activos financieros deben estar relacionados en forma lineal con las betas del mercado y donde el valor del intercepto será igual a cero.

Se han realizado una gran cantidad de estudios empíricos presentando evidencia que contradice lo sugerido por el CAPM. Se busca rechazar estadísticamente la hipótesis de que el intercepto de la regresión de excesos de rendimiento sobre el exceso de rendimiento del mercado es cero.

Entre muchas de las posibles explicaciones, el presente trabajo se basa en el análisis de factores de riesgo. Esta línea de argumentación considera modelos multifactoriales de valuación de activos construidos bajo los supuestos de racionalidad de los inversionistas y mercados de capital perfectos. Esto significa, que las posibles desviaciones observadas desde el CAPM se deben tanto a factores de riesgo no observados o a una mala identificación del portafolio de mercado (Roll, 1977).

Como resume Roll (1977): a) La única implicación sujeta a prueba desde el CAPM es si el portafolio de mercado es eficiente en el sentido media-varianza, b) Si el portafolio de Mercado es eficiente entonces la relación riesgo-rendimiento (SML) es lineal, c) dado que el portafolio de mercado no es observable, los vastos portafolio de mercado (índices) ofrecen un número infinito de portafolios eficientes ex post, y d) el uso de un Proxy de mercado crea dos problemas: 1) no representan al mercado, aun siendo eficientes y 2) aun si no fuera eficiente, el portafolio verdadero puede ser eficiente.

El hecho de que el intercepto se desvíe de cero ha llevado a considerar modelos de valuación multifactoriales como el APT y el modelo CAPM intertemporal.

Al introducir factores adicionales en forma de excesos de rendimiento en relación con los portafolios construidos se muestra que, efectivamente el intercepto se aproxima a cero, lo que sugiere que es precisamente la existencia de otros factores de riesgo no observados o considerados los que explican las desviaciones del CAPM.

Sin embargo, como señalan los autores, estos resultados deben interpretarse con cautela. Cuando se analizan datos ex post y se agrupan los activos, probablemente la desviación del CAPM sea producida porque los activos tienen una fuente común de término de error, lo que sugiere que es estadísticamente significativa. Al introducir factores adicionales de riesgo que les son comunes resultarán, en este sentido, favorables para corregir dichas desviaciones<sup>2</sup>.

Existe controversia sobre si las desviaciones del CAPM son o no debidas a factores de riesgo no considerados u observados ya que empíricamente es difícil distinguir entre varias hipótesis, entre las que destacan:

- 1) en un análisis ex post, siempre es posible encontrar factores de riesgo que hagan que el intercepto sea cero;
- 2) sin una teoría específica de identificación de los factores de riesgo, siempre es posible explicar en un corte transversal los rendimientos esperados con modelos multifactoriales.

En ausencia de teorías alternativas específicas que permitan distinguir entre los diferentes modelos de valuación de la relación riesgo-rendimiento y la falta de disponibilidad de largas series de tiempo, es limitado lo que se pueda decir acerca de la relación riesgo-rendimiento entre los activos financieros.

Este trabajo evalúa desde una perspectiva diferente la utilidad de los modelos basados en factores. Se asume que los rendimientos de los activos tienen una estructura de factores exacta, pero uno de los factores no es observado.

Bajo este supuesto, se desarrollan las implicaciones para la estimación de rendimientos esperados y la selección de portafolios. Cuando un factor de riesgo es omitido desde un modelo de valuación, la resultante sub/sobrevaluación está relacionada con la matriz de covarianzas.

Se propone imponer una relación entre los elementos de la sub/sobrevaluación ( $\alpha$ ) y la matriz de covarianzas residual ( $\Sigma$ ) como una restricción para estimar el componente que origina la sub/sobrevaluación de los rendimientos esperados, así como considerar esta información en la selección del portafolio.

Cuando un factor de riesgo es omitido (missing) desde un modelo de valuación, la resultante sub/sobrevaluación está relacionada a la matriz de covar-

---

<sup>2</sup> Data snooping

ianzas. En ausencia de tal relación, los activos sub/sobrevaluados podrían ser agrupados para formar oportunidades de arbitraje asintóticas. La relación entre sub/sobre valuación y la matriz de covarianzas residual se impone como una restricción en la estimación del componente de sub/sobrevaluación del rendimiento esperado y en la selección del portafolio.

### 3. El modelo de valuación lineal basado en factores de riesgo

Considere un modelo lineal de factores para los rendimientos de  $N$  activos. Sea  $\mathbf{z}_t$  el vector de excesos de rendimientos de estos  $N$  activos en el periodo  $t$ , con una media  $\mu$  y una matriz de Covarianzas  $\mathbf{V}$ . Para un conjunto de  $K$  factores de riesgo, podemos expresar la relación lineal entre los excesos de rendimiento de los activos y los rendimientos de los factores de riesgo, como:

$$\mathbf{z}_t = \alpha + \mathbf{B}\mathbf{z}_{Kt} + \varepsilon_t \quad (2).$$

$$E[\varepsilon_t] = 0, \quad E[\varepsilon_t \varepsilon_t^T] = \Sigma, \quad cov[\mathbf{z}_{Kt} + \varepsilon_t] = 0. \quad (3)$$

$\mathbf{B}$  es la  $N \times K$  matriz de sensibilidades al factor  $\mathbf{z}_{Kt}$ , el cual es el  $K$ -vector de rendimientos de factores de riesgo en el periodo  $t$ ,  $\alpha$  es el  $N$ -vector de sub/sobrevaluación y  $\varepsilon_t$  es el  $N$ -vector de errores. Asumimos que los rendimientos de los factores de riesgo no son combinaciones lineales de los  $N$  activos, así que  $\Sigma$  es de rango completo.

Una relación de valuación exacta con  $K$ -factores implica que cada elemento del vector ( $\alpha$ ) es igual a cero. Si la valuación exacta no se mantiene debido a un factor no observado, entonces ( $\alpha$ ) no es cero y el factor no observado está contenido en la matriz de covarianzas residual ( $\Sigma$ ). La relación entre ( $\alpha$ ) y ( $\Sigma$ ) puede ser desarrollada usando el "portafolio ortogonal óptimo".

Este es un portafolio único construido desde una población de activos el cual es óptimo, puesto que puede ser combinado con los portafolios de los factores para formar el portafolio tangencia y que satisfaga la condición de ser ortogonal a los factores de riesgo considerados. El portafolio ortogonal es denotado por  $h$ .

La utilidad del portafolio  $h$  viene del hecho que cuando es añadido al modelo de factores ( $K$ ) en la ecuación (2), el intercepto ( $\alpha$ ) se desvanece y la matriz de sensibilidades  $\mathbf{B}$  no es alterada.

Las propiedades de optimalidad llevan a desvanecer el intercepto y la condición de ortogonalidad lleva a que  $\mathbf{B}$  no cambie. Puesto que el elemento de sub/sobrevaluación se desvanece cuando  $h$  es añadido a los  $K$ -factores;  $h$  puede ser pensado como un factor omitido en un modelo de valuación lineal. Al adicionar el factor omitido,

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{B}\mathbf{z}_{Kt} + \beta_h \mathbf{z}_{ht} + \mathbf{u}_t \quad (4).$$

$$E[\mathbf{u}_t] = 0, \quad E[\mathbf{u}_t \mathbf{u}_t^T] = \Phi. \quad (5)$$

$$cov[\mathbf{z}_{Kt}, \mathbf{u}_t] = 0, \quad cov[\mathbf{z}_{ht}, \mathbf{u}_t] = 0. \quad (6)$$

$$E[\mathbf{z}_{ht}] = \mu_h, \quad E[(\mathbf{z}_{ht} - \mu_h)^2] = \sigma_h^2. \quad (7)$$

$\beta_h$  es el  $N$ -vector de sensibilidades de los activos al factor omitido  $h$  y  $\mathbf{z}_{ht}$  denota el rendimiento del portafolio  $h$  en el tiempo  $t$ . La liga entre  $\alpha$  y  $\Sigma$  resulta

de comparar las ecuaciones (2) y (4). Tomando las esperanzas no condicionales en ambas ecuaciones,

$$\alpha = \beta_h \mu_h \tag{8}$$

y por igualar la varianza de  $\varepsilon_t$  con la varianza de  $\beta_h \mathbf{z}_{ht} + \mathbf{u}_t$

$$\begin{aligned} \Sigma &= \beta_h \beta_h^T \sigma_h^2 + \Phi \\ &= \alpha \alpha^T \frac{1}{S_h^2} + \Phi. \end{aligned}$$

Donde  $S_h$  denota  $\frac{\mu_h}{\sigma_h}$ , la razón de Sharpe del portafolio  $h$ . La ecuación (9) liga el modelo de sub/sobrevaluación a a la matriz de covarianzas residual  $\Sigma$ . En general, si  $\Sigma$  no esta relacionada a  $\alpha$ , existirían oportunidades de arbitraje asintóticas.

#### 4. Los rendimientos esperados y la selección de portafolio

##### 4.1 El caso de un factor de riesgo

Un modelo estadístico en el cual los rendimientos de los activos son generados por un factor ha sido utilizado comúnmente en finanzas desde la introducción del modelo diagonal de Sharpe (1963) y su aplicación por Treynor y Black (1973). Si asumimos que los rendimientos de los activos son generados por un modelo de un solo factor de riesgo, pero el factor  $h$  se asume no observado, este modelo corresponde al que se presenta en la ecuaciones (4)-(7) para  $K = 0$ :

$$\mathbf{z}_t = \beta_h \mathbf{z}_{Kt} + \mathbf{u}_t, \tag{10}$$

$$E[\mathbf{u}_t] = 0, \quad E[\mathbf{u}_t \mathbf{u}_t^T] = \Phi, \quad cov[\mathbf{z}_{ht}, \mathbf{u}_t] = 0. \tag{11}$$

Puesto que  $\mathbf{z}_{ht}$  es no observado, el modelo usado en en el análisis corresponde al que se presenta en las ecuaciones (3) y (4) para  $K = 0$

$$\mathbf{z}_t = \alpha + \varepsilon_t, \tag{12}$$

$$E[\varepsilon_t] = 0, \quad E[\varepsilon_t \varepsilon_t^T] = \Sigma \tag{13}$$

Siguiendo el argumento presentado en las ecuaciones (10)-(13) esto implica que  $\Sigma = \alpha \alpha^T \frac{1}{S_h^2} + \Phi$ . De esta manera la media  $\alpha$  aparece en matriz de covarianzas de los rendimientos. Esta observación es usada en la estimación de los rendimientos esperados y en la selección del portafolio. Para obtener las ponderaciones del portafolio en la estructura media varianza con un activo libre de riesgo, el portafolio óptimo de activos con riesgo, el “portafolio tangencia, es el portafolio con el máximo cociente de Sharpe entre todos los portafolio de  $N$  activos. Sea  $\mathbf{x}_{N^*}$  el  $N$ -vector de ponderaciones del portafolio tangencia. El resultado estándar de las matemáticas de media-varianza es que:

$$\mathbf{x}_{N^*} = (\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu})^{-1} \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}. \tag{14}$$

Como se muestra en las ecuaciones (11) y (12), en el modelo de factores no observados, la media  $\mu$  de los excesos de rendimientos de los activos  $\mathbf{z}$ , es igual a  $\alpha$  y la matriz de covarianzas  $\mathbf{V}$  es igual  $\mathbf{\Sigma}$ . Por lo tanto

$$\mathbf{x}_{N^*} = (\mathbf{1}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \alpha)^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-1} \alpha. \quad (15)$$

En el caso de múltiples factores, existe una relación exacta un  $(K + 1)$  factor con  $K$  factores observados.

#### 4.2 Dos factores de riesgo y uno no observado

En nuestro análisis se presenta el caso de dos factores ( $K = 1$ ). Sea  $p$  el factor de riesgo observado, y  $\mathbf{z}_{Pt}$  su rendimiento en el tiempo  $t$ . El modelo lineal de dos factores es:

$$\mathbf{z}_t = \alpha + \beta \mathbf{z}_{Pt} + \varepsilon_t. \quad (16)$$

$$E[\varepsilon_t] = 0, \quad E[\varepsilon_t \varepsilon_t^T] = \mathbf{\Sigma} = \alpha \alpha^T / S_h^2 + \Phi. \quad (17)$$

Recordando que el segundo factor puede ser pensando como el portafolio óptimo ortogonal  $h$  que desvanece  $\alpha$  al adicionarlo al modelo.

El rendimiento esperado para los  $N$  activos es

$$\mu = \alpha + \beta \mu_P. \quad (18)$$

El rendimiento esperado tiene dos componentes, el vector de sub/sobrevaluación con respecto al modelo de  $K$ -factor,  $\alpha$ , y el componente relacionado al factor observado,  $\beta \mu_P$ . Para la selección del portafolio debemos considerar lo siguiente: cuando el factor de riesgo observado (portafolio-factor) cae dentro del conjunto eficiente construido con los  $N$  activos, el proceso de liga de los  $\alpha$  con  $\mathbf{\Sigma}$ , puede realizarse mediante la ecuación (16). De esta manera, estas ponderaciones óptimas nos permiten construir las ponderaciones  $\mathbf{x}_{N^*}$  para estimar desde la matriz de covarianzas residual el factor no observado  $\mu_h$  y  $\beta_h$ . Tal que se satisfaga  $\alpha = \beta_h \mu_h + \mu$ .

En el caso de que el índice utilizado como factor de riesgo se adicione para formar el portafolio tangencia. El objetivo de la selección del portafolio de este será conformado de  $N + 1$  activos. En este caso, el proceso de selección se puede descomponer en dos etapas, tal como lo han propuesto Treynor y Black (1973) y Gibbons, Ross y Shanken (1989), entre otros.

En la primera etapa, conformar el portafolio "activo" de  $N$  activos. En la segunda etapa, este portafolio activo es combinado con el portafolio del factor de riesgo para formar el portafolio tangencia. Los autores modifican esta versión para modificar la visión del portafolio activo como el portafolio ortogonal óptimo en el universo de  $N + 1$  activos. De esta manera, las ponderaciones en el portafolio activo dependerán del elemento de sub/sobrevaluación y no de la media y varianza del factor de riesgo observado. La mezcla óptima del portafolio activo y el factor de riesgo dependerán de la media y la varianza del factor de riesgo o índice seleccionado.

La solución a este problema es  $\mathbf{x}_{N+}$  vector  $N + 1$  de ponderaciones del portafolio tangencia, donde los primeros  $N$  elementos representan las ponderaciones de los  $N$  activos y el  $(N + 1)$ -ésimo elemento representa el peso del

factor de riesgo:

$$\mathbf{x}_{N++} = c_1 \begin{bmatrix} \Sigma^{-1}\alpha \\ -\beta^T \Sigma^{-1}\alpha + \frac{\mu_P}{\sigma_P^2} \end{bmatrix}$$

Donde  $c_1$  es una constante normalizada tal que  $\mathbf{1}^T \mathbf{x}_{N+} = 1$ .

### 5. Análisis empírico

#### 5.1 Selección de la muestra y periodos de estudio

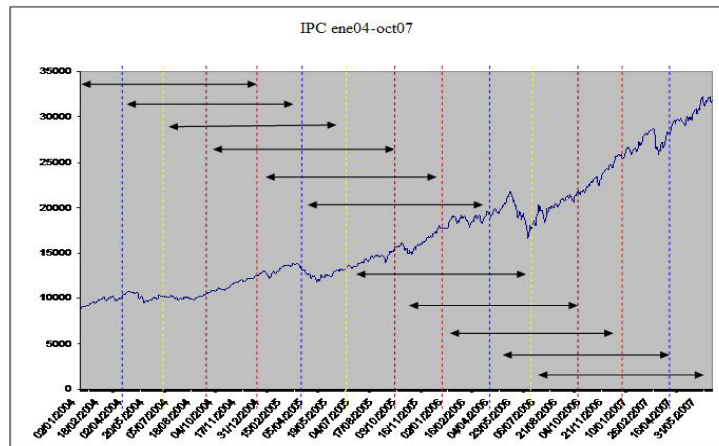
Para implementar el modelo lineal de factores cuando existen factores no observados, se consideraron los excesos de rendimientos de una muestra de 25 acciones del mercado de valores mexicano, así como el exceso de rendimiento del IPC.

Se consideró el periodo de análisis de enero de 2004 a julio de 2007, para lo que se utilizaron observaciones diarias (ajustadas por derechos)<sup>3</sup>. Para obtener los excesos de rendimiento se tomaron las tasas diarias de CETES del mercado secundario de 28 días<sup>4</sup>.

Se realiza una división en periodos anuales, utilizando ventanas con un trimestre de diferencia. De esta manera se conformaron 11 subperiodos y se comparan los resultados entre ellos y respecto al periodo total.

**Figura 1**

*La gráfica muestra el IPC de enero de 2004 a julio de 2007. Las flechas indican los subperiodos anuales seleccionados*



Como se puede observar en la Figura 1, el periodo total muestra una tendencia a la alza combinando periodos de alto y bajo crecimiento. Resaltan las

<sup>3</sup> Economática

<sup>4</sup> Reuters



medias y desviaciones estándar de los subperiodos desde julio de 2005 a abril de 2007 como de mayores rendimientos y volatilidad. El exceso de rendimiento promedio del índice de mercado es 33.14%, con una desviación estándar de 18.47%.

## 5.2 Un factor no observado

En la Tabla 1 se muestran los resultados del análisis de un factor no observado ( $K = 0$ ), es decir, cuando hay un solo factor y no es observado. Se presentan las ponderaciones de los activos de los portafolios tangencia para cada uno de los subperiodos y el periodo total.

**Tabla 1**

MAXIMIZACION SHARPE UN FACTOR NO OBSERVADO												
	ene04-ene05	abr04-abr05	jul04-jul05	oct04-oct05	ene05-ene06	abr05-abr06	jul05-jul06	oct05-oct06	ene06-ene07	abr06-abr07	jul06-jul07	TODO
SD	32%	193%	40%	30%	47%	31%	87%	45%	22%	26%	22%	25%
E(Rp)	148%	653%	172%	134%	162%	118%	357%	142%	65%	124%	136%	65%
ALFAA	11%	121%	41%	24%	-48%	-55%	-271%	-104%	-20%	-26%	-6%	-17%
AMXL	41%	125%	39%	34%	40%	37%	102%	22%	5%	-2%	38%	39%
ARA	-30%	-238%	-55%	-27%	-7%	5%	-6%	2%	7%	-1%	-2%	-16%
ARCA	-16%	-161%	-6%	1%	6%	-4%	58%	81%	47%	40%	50%	18%
BIMBO	2%	111%	9%	14%	16%	-16%	-40%	-35%	4%	4%	22%	12%
CEMEX	31%	270%	54%	42%	49%	18%	-32%	-92%	-60%	-69%	-24%	4%
COMERCIBUC	-52%	-413%	-18%	16%	16%	22%	24%	12%	17%	10%	-11%	-12%
ELEKTRA	38%	127%	-12%	-28%	-81%	-3%	27%	17%	15%	22%	24%	17%
FEMSAUBD	2%	-153%	10%	31%	15%	77%	159%	88%	46%	-32%	-17%	25%
GCARSO	36%	105%	39%	28%	37%	25%	29%	19%	4%	11%	-11%	8%
GEOB	42%	268%	54%	47%	66%	19%	9%	10%	-10%	10%	3%	16%
GFINBURO	12%	110%	21%	13%	-3%	-29%	-74%	-24%	-1%	-10%	9%	4%
GFNORTEO	49%	390%	86%	40%	5%	13%	100%	16%	21%	19%	17%	26%
GMEXICOB	7%	79%	10%	12%	22%	13%	80%	34%	13%	13%	20%	28%
GMODELO	-14%	-194%	-19%	-10%	22%	-11%	-8%	-1%	2%	-15%	-34%	-15%
ICA	-3%	-78%	-4%	-47%	-87%	-9%	-32%	45%	3%	-3%	5%	-9%
KIMBERA	55%	197%	24%	14%	-52%	-5%	-56%	-17%	5%	8%	-4%	-3%
PENOLES	-10%	-74%	-7%	-36%	-26%	12%	15%	14%	-4%	-8%	0%	-7%
SORIANA	27%	64%	12%	-1%	-6%	-30%	-134%	-27%	5%	32%	30%	23%
TELECOMI	-14%	-89%	-36%	-37%	6%	3%	-16%	42%	-10%	13%	18%	4%
TELMEX	-55%	-410%	-75%	-7%	7%	-6%	-67%	-10%	-15%	23%	4%	-16%
TLEVISA	26%	120%	-15%	-30%	45%	24%	58%	16%	20%	33%	-9%	-3%
TVAZTECA	-20%	-60%	-43%	-14%	-21%	-21%	97%	-18%	-15%	9%	-13%	-16%
WALMEX	-44%	132%	50%	32%	73%	21%	59%	18%	14%	-8%	-39%	-12%
VITROA	-23%	-249%	-57%	-11%	6%	2%	19%	-8%	6%	24%	30%	5%

La tabla muestra las ponderaciones de los portafolios tangencia formados con los excesos de rendimiento de los 25 activos. Los altos rendimientos esperados asumen un alto nivel de ventas en corto de algunos de los activos. Al observar el periodo completo, entre 5 activos se encuentra prácticamente el 100% de la inversión.

La relación lineal entre los excesos de rendimiento y los portafolios tangencia en cada subperíodo es exacta. Este resultado implica que las  $\alpha_j$  son cero no existiendo el elemento de sub/sobrevaluación.

Aun cuando las betas obtenidas a partir de los portafolios tangencia son bajas, la excepción son los activos que mantienen ponderaciones positivas en promedio en los diferentes subperiodos.

La Tabla 2 muestra las betas obtenidas y la Figura 2 muestra el ajuste lineal entre los excesos de rendimiento y las betas obtenidas para el periodo

completo (esta situación se repite en cada subperíodo).

**Tabla 2**

BETAS DE ACTIVOS CON UN FACTOR NO OBSERVADO												
	ene04-ene05	abr04-abr05	jul04-jul05	oct04-oct05	ene05-ene06	abr05-abr06	jul05-jul06	oct05-oct06	ene06-ene07	abr06-abr07	jul06-jul07	TODO
ALFAA	0.36	0.04	0.25	0.30	0.04	0.04	-0.01	-0.06	0.17	0.20	0.31	0.41
AMXL	<b>0.41</b>	<b>0.03</b>	<b>0.23</b>	<b>0.44</b>	<b>0.28</b>	<b>0.54</b>	<b>0.18</b>	<b>0.29</b>	<b>0.51</b>	<b>0.32</b>	<b>0.45</b>	<b>0.82</b>
ARA	0.11	0.00	0.06	0.15	0.17	0.21	0.09	0.19	0.56	0.36	0.31	0.39
ARCA	0.07	0.00	0.07	0.10	0.09	0.08	0.06	0.24	0.54	0.41	0.33	0.33
BIMBO	0.19	0.03	0.15	0.25	0.16	0.14	0.03	0.03	0.40	0.36	0.54	0.51
CEMEX	0.26	0.03	0.23	0.44	0.32	0.52	0.12	0.13	0.17	0.09	0.24	0.56
COMERCIUBC	0.05	-0.03	0.01	0.20	0.17	0.44	0.12	0.17	0.59	0.45	0.29	0.40
ELEKTRA	0.37	0.02	0.08	0.03	-0.07	0.15	0.10	0.19	0.46	0.37	0.44	0.51
FEMSAUBD	0.26	0.01	0.12	0.30	0.18	0.44	0.13	0.26	0.60	0.20	0.26	0.56
GCARSO	0.27	0.02	0.15	0.20	0.14	0.22	0.07	0.18	0.52	0.47	0.40	0.52
GEOB	0.44	0.06	0.31	0.49	0.30	0.40	0.11	0.23	0.36	0.39	0.38	0.73
GFINBURO	0.36	0.05	0.20	0.14	0.07	-0.04	-0.02	0.01	0.15	0.20	0.31	0.43
GFNORTEO	<b>0.40</b>	<b>0.06</b>	<b>0.31</b>	<b>0.41</b>	<b>0.13</b>	<b>0.26</b>	<b>0.14</b>	<b>0.25</b>	<b>0.76</b>	<b>0.56</b>	<b>0.54</b>	<b>0.75</b>
GMEXICOB	<b>0.44</b>	<b>0.04</b>	<b>0.23</b>	<b>0.24</b>	<b>0.18</b>	<b>0.39</b>	<b>0.20</b>	<b>0.35</b>	<b>0.57</b>	<b>0.55</b>	<b>0.60</b>	<b>0.90</b>
GMODELO	0.09	0.00	0.08	0.16	0.13	0.17	0.08	0.19	0.45	0.27	0.25	0.34
ICA	0.29	0.01	0.11	0.02	-0.03	0.18	0.08	0.33	0.49	0.23	0.39	0.50
KIMBERA	0.21	0.01	0.10	0.14	0.00	0.11	0.01	0.06	0.36	0.34	0.28	0.27
PENOLIS	0.13	0.00	0.13	-0.06	0.00	0.36	0.14	0.40	0.57	0.39	0.48	0.46
SORIANA	0.31	0.02	0.13	0.13	0.09	0.04	0.00	0.13	0.49	0.61	0.69	0.61
TELECOM1	0.14	0.00	0.08	0.12	0.18	0.24	0.07	0.30	0.36	0.57	0.66	0.54
TELMEX	0.10	0.00	0.03	0.13	0.12	0.20	0.05	0.14	0.13	0.37	0.42	0.35
TLEVISA	0.30	0.03	0.14	0.17	0.15	0.23	0.09	0.13	0.38	0.35	0.24	0.45
TVAZTECA	0.13	0.00	-0.10	-0.06	0.00	0.07	0.13	0.07	0.26	0.37	0.27	0.28
WALMEX	0.11	0.02	0.13	0.22	0.25	0.29	0.11	0.20	0.51	0.39	0.25	0.42
VITROA	0.05	-0.05	-0.18	0.13	0.11	0.14	0.08	0.04	0.57	0.63	0.92	0.52

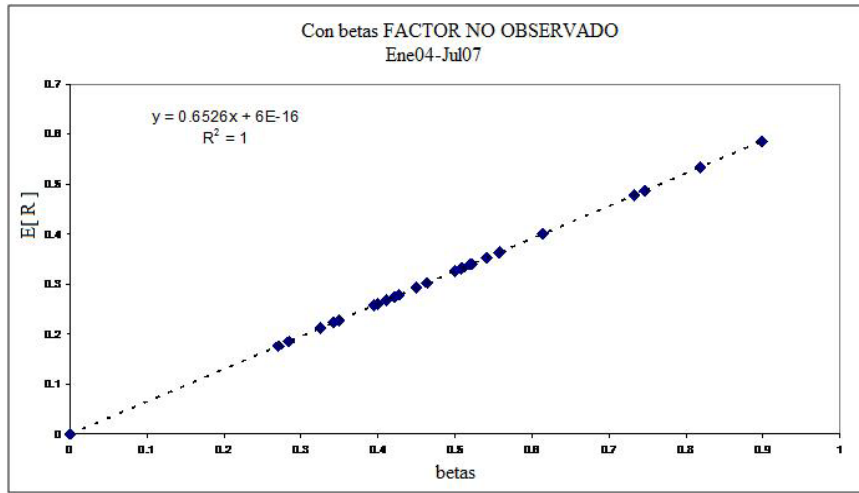
La tabla muestra las betas obtenidas a partir de los portafolios tangencia. Las betas cambian entre subperiodos para los activos. Este resultado implica que la pendiente de la SML es cambiante. El resultado se puede observar en la Tabla 1, donde se muestran los rendimientos de los portafolios tangencia.

**5.3 Introduciendo al IPC como factor Observado**

Como se muestra en la Tabla 3, las betas calculadas a partir de los excesos de rendimiento del IPC, muestran un patrón relativamente más estable entre los subperiodos y respecto al periodo completo. Esto muestra que la  $COV(z_i, z_{ipc})$ , es decir, la contribución marginal del activo al riesgo de cada activo a la varianza de los excesos de rendimiento del IPC se mantiene en cada subperíodo.

Como se observa en los análisis de corte transversal no solo cambian la relación del risk-Premium del índice del mercado, sino que se observa el problema de las alfas y la ordenada al origen diferentes de cero. Resultado que se describe en la primera parte del trabajo. El problema de disponibilidad de datos históricos y muestras pequeñas, repercute en el bajo nivel de significancia estadística de las alfas estimadas. Sin embargo, como se aprecia en el cálculo de las alfas anualizadas, estas pueden representar rendimientos aun superiores a las tasas libres de riesgo de cada uno de los subperiodos.

Figura 2



La figura muestra el ajuste lineal entre los excesos de rendimiento de los activos y el portafolio tangencia. El mismo ajuste se repite para cada subperiodo; el Risk-premium del portafolio tangencia muestra una relación exacta con los rendimientos promedio esperados.

Tabla 3

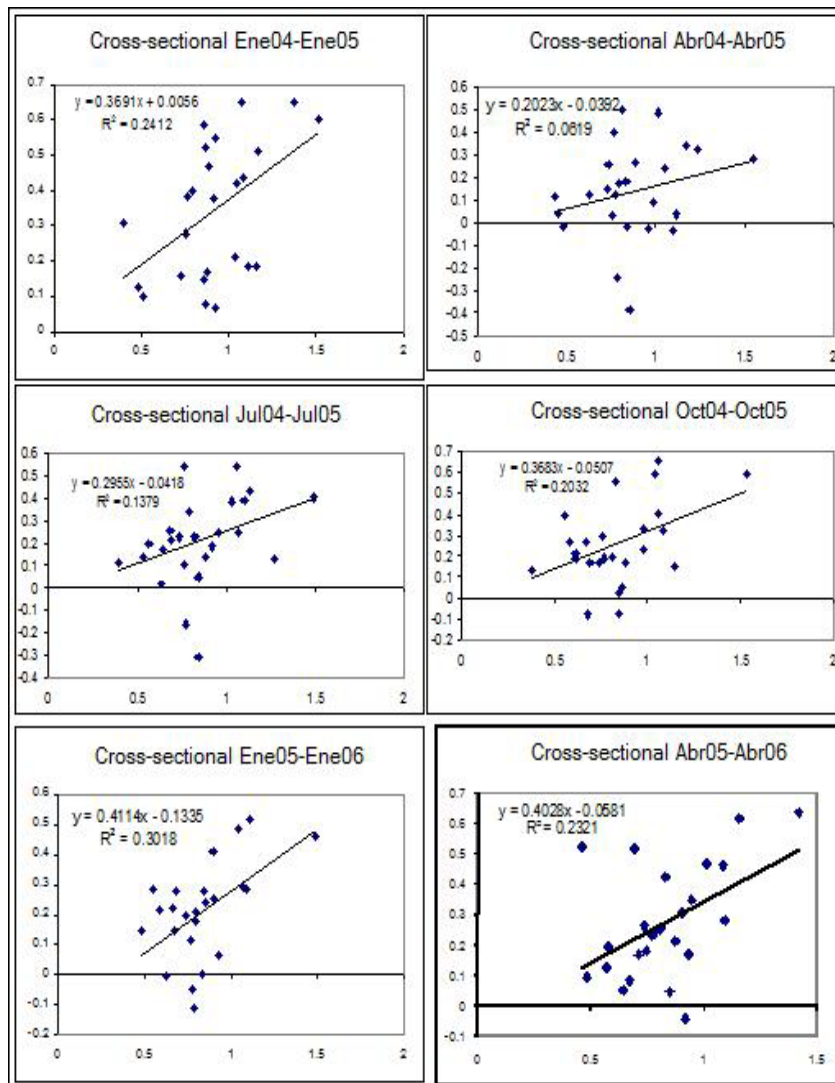
	beta ipc											
	ene04-ene05	abr04-abr05	jul04-jul05	oct04-oct05	ene05-ene06	abr05-abr06	jul05-jul06	oct05-oct06	ene06-ene07	abr06-abr07	jul06-jul07	TODO
ALFAA	1.16	1.24	1.13	1.06	0.93	0.85	0.72	0.79	0.82	0.79	0.86	0.90
AMXL	1.51	1.55	1.49	1.53	1.49	1.42	1.33	1.29	1.27	1.22	1.20	1.35
ARA	0.72	0.75	0.77	0.81	0.84	0.80	0.90	0.84	0.85	0.92	0.90	0.86
ARCA	0.50	0.49	0.39	0.38	0.48	0.48	0.45	0.39	0.37	0.41	0.36	0.42
BIMBO	0.75	0.74	0.95	0.98	0.90	0.93	0.69	0.69	0.71	0.68	0.83	0.79
CEMEX	0.91	0.89	1.03	1.04	1.11	1.15	1.14	1.12	1.09	1.06	1.01	1.04
COMERCIOBC	0.93	0.79	0.63	0.58	0.68	0.69	0.71	0.73	0.70	0.79	0.93	0.79
ELEKTRA	0.92	0.79	0.89	0.86	0.78	0.75	0.56	0.59	0.57	0.52	0.49	0.66
FEMSAUBD	0.77	0.63	0.57	0.55	0.55	0.46	0.59	0.66	0.72	0.88	0.98	0.74
GCARSO	0.79	0.73	0.68	0.67	0.66	0.81	0.80	0.86	0.93	0.90	1.06	0.87
GEOB	1.07	1.01	1.06	1.06	1.04	1.01	1.09	1.09	1.09	1.13	1.06	1.08
GFINBURO	0.87	0.77	0.79	0.76	0.77	0.92	0.62	0.57	0.55	0.47	0.56	0.66
GFNORTEO	0.86	0.81	0.77	0.83	0.79	0.90	0.88	0.93	0.99	1.04	1.16	0.95
GMEXICOB	1.37	1.17	1.10	1.09	1.09	1.08	1.14	1.07	1.04	1.10	0.93	1.14
GMODELO	0.48	0.45	0.53	0.61	0.59	0.58	0.70	0.74	0.78	0.89	0.91	0.70
ICA	1.05	0.99	0.92	0.85	0.77	0.87	0.93	0.98	0.99	0.97	0.87	0.93
KIMBERA	0.40	0.43	0.64	0.61	0.62	0.57	0.39	0.42	0.37	0.46	0.68	0.51
PENOLDES	1.16	0.96	0.82	0.85	0.83	0.83	0.97	1.02	1.02	1.09	1.00	0.99
SORIANA	0.89	0.84	0.74	0.69	0.67	0.65	0.66	0.67	0.66	0.75	0.80	0.75
TELECOMI	1.03	1.12	1.27	1.15	1.07	1.09	1.00	1.06	1.08	0.99	1.03	1.04
TELMEX	0.85	0.84	0.84	0.74	0.75	0.77	0.76	0.79	0.79	0.78	0.79	0.79
TLEVISA	1.08	1.05	1.07	0.98	0.85	0.74	0.74	0.77	0.81	0.85	0.87	0.89
TVAZTECA	1.11	1.10	0.77	0.68	0.63	0.67	0.69	0.69	0.78	0.78	0.85	0.82
WALMEX	0.88	0.78	0.69	0.76	0.69	0.94	1.09	1.10	1.09	1.13	1.15	1.00
VITROA	0.87	0.85	0.84	0.88	0.79	0.71	0.69	0.68	0.71	0.74	0.80	0.78

Esta tabla muestra los resultados de las betas estimadas respecto a los excesos de rendimiento del IPC para cada subperiodo. A diferencia de las betas estimadas cuando solo hay un factor no observado en la Tabla 2.

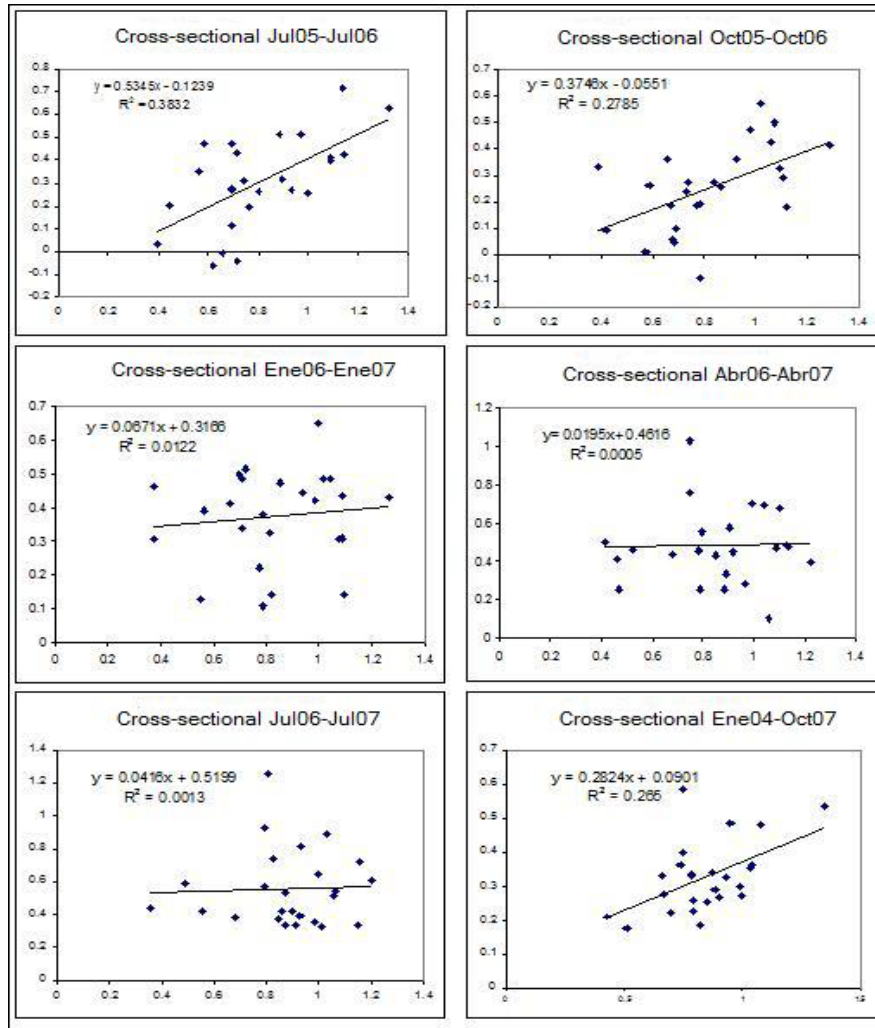
La pendiente de las SML estimada en el análisis de corte transversal difiere de la  $\mu_{ipc}$  calculada en cada uno de los subperiodos, mientras que las ordenadas al origen tienden a ser diferentes de cero.

Las figuras 3 y 4 muestran el análisis de corte transversal para cada uno de los subperíodos y el periodo completo. Para cada subperíodo la relación lineal entre los excesos de rendimiento de los activos y las betas no se satisface de manera exacta.

Figura 3



**Figura 4**



Con base en estos resultados se estima el factor no observado  $h$ , así como las ponderaciones para la asignación de este portafolio ortogonal. Este modelo se presenta en las ecuaciones 16-17,

$$\mathbf{z}_t = \alpha + \beta \mathbf{z}_{pt} + \varepsilon_t \quad (16)$$

$$E[\varepsilon_t] = 0, \quad E[\varepsilon_t \varepsilon_t^T] = \Sigma = \alpha \alpha^T / S_h^2 + \Phi \quad (17)$$

Al tomar los valores esperados tenemos

$$\mu = \alpha + \beta \mu_P \quad (18)$$

Donde a partir de la relación entre  $\alpha$  y  $\Sigma$  se el factor no observado para cada subperíodo tal que se satisface

$$\alpha = \beta_h \mu_h + \mathbf{u} \tag{19}$$

La solución a las ponderaciones del portafolio ortogonal que permite resolver la estimación de  $\beta_h$  y  $\mu_h$  sigue siendo<sup>1</sup>:

$$\mathbf{x}_{h^*} = (\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \alpha)^{-1} \Sigma^{-1} \alpha.$$

Con base en esta información se obtienen las  $\beta_h$  asociadas a este factor de riesgo no observado. La información contenida en la matriz de covarianzas residual es utilizada con las ponderaciones  $\mathbf{x}_h$ , de tal manera que

$$\beta_h = \frac{\Sigma \mathbf{x}_h}{\mathbf{x}_h^T \Sigma \mathbf{x}_h} \tag{20}$$

El factor de riesgo no observado  $\beta_h$  muestra que para el todo periodo implica un exceso de rendimiento del 7.38%. El rendimiento esperado de un activo con betas cercanas a uno implica que el exceso de rendimiento esperado del activo paga aproximadamente un 40%.

#### 5.4 Análisis de corte transversal en el modelo de factores

Los resultados en corte transversal reflejan el ajuste de los rendimientos al modelo de factores de manera exacta.

$$\mathbf{z}_t = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_h + \gamma_2 \beta_{IPC} + \mathbf{u}_t \tag{21}$$

El resultado obtenido para todos y cada uno de los subperiodos y el periodo completo ajustan de manera exacta.

Al tomar el valor esperado obtenemos

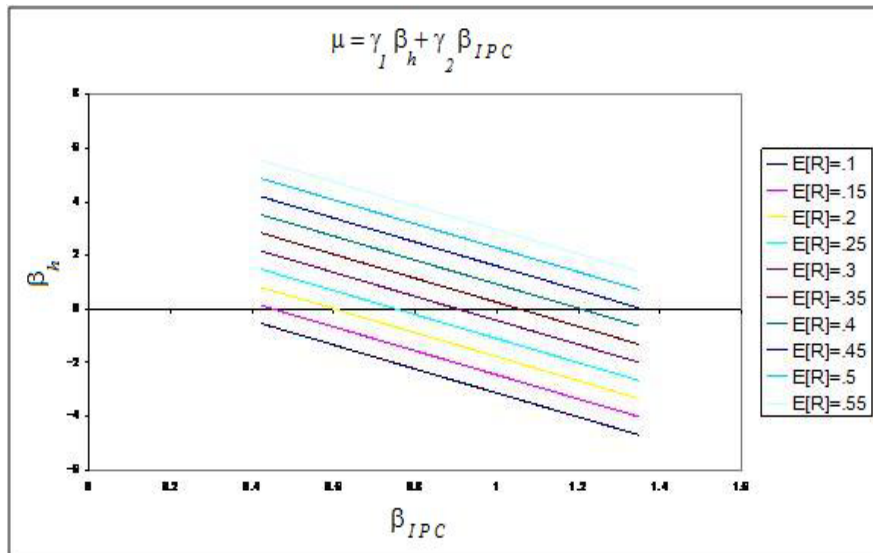
$$\mu = \gamma_1 \beta_h + \gamma_2 \beta_{IPC}. \tag{22}$$

Como se observa en la Figura 5, la relación entre los excesos de rendimiento de los activos y las betas de los factores de riesgo muestra una relación multidimensional del riesgo.

---

<sup>1</sup> Cuando el exceso de rendimiento del índice se encuentre dentro del conjunto de oportunidades de inversión de los  $N$  activos seleccionados.

**Figura 5**



La gráfica muestra varias curvas de nivel. Para cada nivel de exceso de rendimiento existen diferentes combinaciones de  $\beta_h$  y  $\beta_{IPC}$ .

**5.5 Asignación de activos en el portafolio**

En cuanto a la asignación de activos en el portafolio tangencia, dada el modelo de factores, cuando se utilizan las ponderaciones  $\mathbf{x}_h$  para formar el portafolio  $\mu(\mathbf{x}_h)$  para cada subperíodo y el periodo completo, se puede observar que con mínimas diferencias en las desviaciones estándar, se incrementan los rendimientos esperados, por lo que el desempeño mejora ajustado por riesgo.

**6. Conclusiones**

El trabajo esta basado en la idea de que los rendimientos de los activos son determinados por factores de riesgos. Aun cuando siempre es posible encontrar en análisis de corte transversal los factores de riesgo que permitan una estructura exacta, esto no significa que puedan determinarse fácilmente desde un punto de vista teórico.

Al tomar un conjunto de activos siempre es posible obtener un factor de riesgo no observado que permita construir una estructura exacta de factores en la determinación de los excesos de rendimiento de los activos. Sin embargo, ni el factor de riesgo ni las betas asociadas a l son constantes en el tiempo, lo que de alguna manera corrobora la dificultad de identificarlos aun para un conjunto de activos en diferentes periodos.

Utilizar muestras relativamente largas para la estimación de esta estructura de factores de riesgo ayudaría a mejorar la significancia estadística de los parámetros, asícomo del elemento de sub/sobrevaluación, mejorando la estimación del factor de riesgo no observado y por tanto, un mejor pronóstico de los excesos de rendimiento de los activos.

La asignación de activos para mejorar la selección del portafolio, muestra mejores resultados en rendimientos esperados dentro y fuera del periodo de muestra. Además, esto evita los altos rendimientos, resultado de un alto nivel de apalancamiento que se obtienen de la maximización de Sharpe sobre el conjunto de  $N$  activos seleccionados.

En este sentido cabe resaltar que la asignación en el portafolio óptimo, no solo considera el rendimiento y riesgo de los activos sino que considera el componente del rendimiento no relacionado con el factor de riesgo observado y las covarianzas residuales generadas.

### Bibliografía

- Black, Fischer (1972). Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing, *Journal of Business*, Vol. 45, No. 3, pp. 444-455.
- Chan, Louis K. C.; Jason Karceski; Josef Lakonishok (1999). On Portfolio Optimization: Forecasting Covariance and Choosing the Risk Model, *The Review of Financial Studies*, Vol. 12, No. 5, pp. 937-974.
- Fama, Eugene F.; Kenneth R. French (1992). The Cross-Section of Expected Returns, *The Journal of Finance*, No. 47, pp. 427-465.
- Graver, Robert R. (1999). On the Cross-Sectional Relation between Expected Return, Betas, and Size, *The Journal of Finance*, Vol. 54, No. 2, pp. 773-789.
- Haugen, Robert A. (2001). *Modern Investment Theory*, Prentice-Hall, Fifth edition, NJ.
- Hearth, Douglas y Zaima, Janis K. (2004). *Contemporary and Portfolio Analysis*, South-Western/Thompson. Fourth edition, Canada.
- Huang, Chi-fu (1998). *Foundations of Financial Economics*, Prentice-Hall, First edition.
- Jensen, Michael C. (1972). Capital Markets: Theory and Evidence, *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 3, No. 2, pp. 357-398.
- Kandel, Shmuel; Robert F. Stambaugh (1989). A Mean-Variance Framework for Test of Asset Pricing Models, *The Review of Financial Studies*, Vol. 2, No. 2, pp. 125-156.
- Lintner, J. (1965). Security Prices, Risk, and Maximal Gains from Diversification, *Journal of Finance*, Vol. 20, No. 5, pp. 587-616.
- Lintner, J. (1965). The Valuation of Risk Asset and the Selection of Risk Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets, *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, No. 1, pp. 13-37.
- MacKinlay, A. Craig; Lubos Pastor (2000). Asset Pricing Models: Implications for Expected Returns and Portfolio Selection, *The Review of Financial Studies*, Vol. 12, No. 4, pp. 883-916.
- MacKinlay, A. Craig. (1995). Multifactor models do not explain deviations from the CAPM, *Journal of Financial Economics*, No. 38, pp. 3-28.
- Mossin, J. (1966). Equilibrium in a Capital Asset Market, *Econometrica*, Vol. 34, No. 4, pp. 768-83.
- Roll, Richard (1977). A Critique of the Asset Pricing Theory's Test, *of Financial Economics*, pp. 129-176.



- Roll, Richard (1980). Orthogonal Portfolio, *The Journal of Financial Quantitative Analysis*, Vol. 15, No. 5, pp. 1005-1023.
- Roll, Richard; Stephen A. Ross (1980). An empirical investigation of the Arbitrage Pricing Theory, *The Journal of Finance*, No. 35, pp. 1073-1103.
- Roll, Richard; Stephen A. Ross (1994) On the Cross-Sectional Relation between Expected Return and Betas, *The Journal of Finance*, Vol. 49, No. 1, pp. 101-121.
- Sharpe, W.F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk, *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 4, pp. 425-42
- Stevens, Guy V., (1998), On the Inverse of the Covariance Matrix in Portfolio Analysis, *The Journal of Finance*, Vol. 53, No. 5, pp. 1821-1827.
- Treynor, J.L. (1961). *Toward a Theory of Market Value of Risk Assets* Unpublished manuscript.